MATURSKI RAD IZ MATEMATIKE

TEMA: GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE I ALGEBRA BROJNIH POLJA

KANDIDAT: VUKOSAVIĆ SLOBODAN
IV_3

I. UVOD

Postoji puno konstruktivnih problema u geometriji koji ni do danas nisu rešeni. Kako bezuspešni pokušaji matematičara nisu doveli u pitanje egzistenciju rešenja tih problema, pojavila se potreba da se dokaže kako se odredjeni konstruktivni problem ne može rešiti uz pomoć lenjira i šestara.

Prilikom rešavanja ovih problema lenjir se može koristiti samo za povlačenje pravih linija. Na primer, problem trisekcije ugla, inače nerešiv, može se rešiti ako se lenjir koristi kao instrument za prenošenje rastojanja.

Najčuveniji konstruktivni problemi su Apolonijev problem dodira, dupliranje kocke, kvadriranje kruga i konstrukcija pravilnog n-tougla (za $n=3-6$ rešenje su znali stari Grci, ali za $n=7$ dokazano je da je 'konstrukcija nemoguća).

Kod dokazivanja nemogućnosti rešenja ovakvih problema polazi se od zajedničkih karakteristika problema koji se mogu rešiti i ove karakteristike se izraze jednačinom.

Nemogućnost rešenja zadatog problema se dokazuje nekonstruktibilnošću rešenja algebarske jednačine (tako je Gaus otkrio da se pravilni n-tougao sa prostim brojem stranica može konstruisati samo ako je $n = 2^{2}+1$ — Fermatov broj —).

U algebri se dugo vremena tragalo za korenima jednačina 5-og i višeg stepena. Nadjeni su koreni jednačina trećeg i četvrtog stepena i to su algebarski izrazi koje dobijamo iz koeficijenata jednačine povezanih racionalnim operacijama i korenovanjem. Za jednačinu 5-og stepena nije nadjen koren, što nije značilo da ovakva jednačina nema rešenja pa se pojavilo mišljenje da u opštem slučaju jednačina n-tog stepena nema rešenja koje se može izraziti korenom.

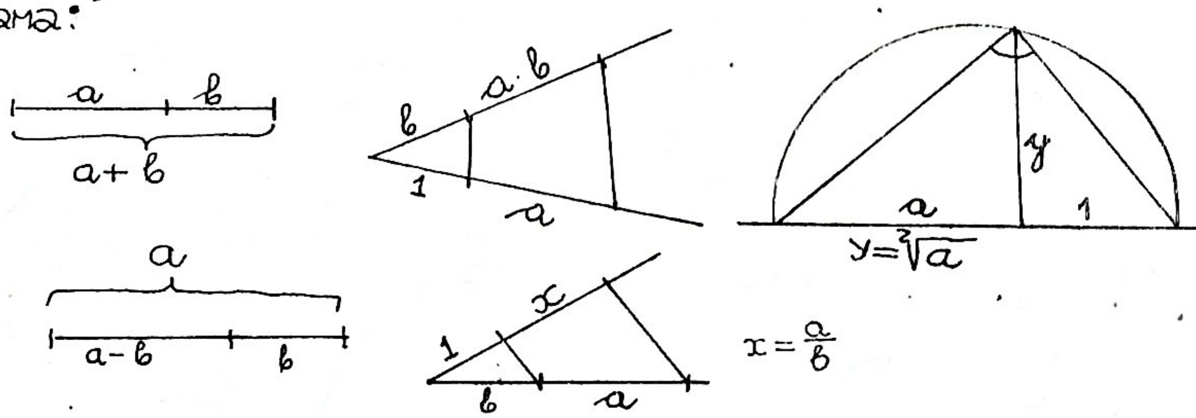
Dokazivanje nerešivosti ovakvih problema uticalo je na razvoj matematike i pojavu teorije grupa.

II. DOKAZI NEMOGUĆIH KONSTRUKCIJA I ALGEBRA

1. KONSTRUKCIJA BROJNOG POLJA

Prilikom dokazivanja nemogućnosti geometrijskih konstrukcija potrebno je geometrijski problem izraziti algebarski. Skoro svaka konstrukcija svodi se na dobijanje nepoznatih duži iz određenog broja poznatih.

Najpre se jednačinom utvrdi odnos između traženih (x, y) i datih duži (a, b), a zatim rešavanjem te jednačine dobijamo nepoznatu duž. Ovo je moguće zato što se racionalne algebarske operacije (sabiranje, oduzimanje, delenje, množenje) i korenovanje mogu izvesti geometrijskim konstrukcijama:



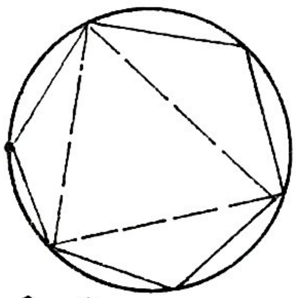
Skup veličina koje racionalnim operacijama možemo dobiti iz zadatih brojeva obrazuje brojno polje generisano zadatim brojevima. Mogućnost konstruisanja neke duži veličine (p) iz zadatih veličina zavisi od toga da li se (p) nalazi u brojnom polju određenom zadatim veličinama; odnosno da li se racionalnim operacijama i korenovanjem broj (p) može dobiti iz zadatih brojeva.

2. PRAVILNI MNOGOUGLOVI

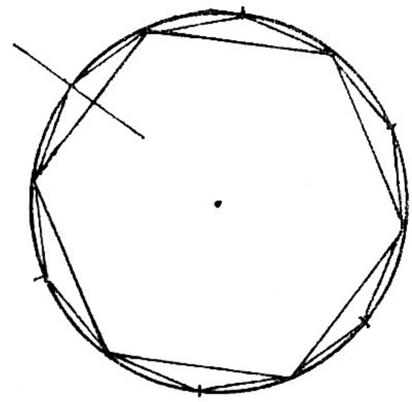
Konstrukcija pravilnog n-tougla svodi se na konstrukciju njegove stranice kada je zadat poluprečnik kružnice u ~~koje~~ kojoj ga treba upisati. Najlakše je konstruisati šestougao jer je stranica $a = R$, isto tako kod četvorougla znamo da je $a = R\sqrt{2}$.

Iz ova dva mnogougla kao i iz svakog drugog možemo konstruisanjem simetrala stranica i spajanjem svakog drugog temena dobiti mnogouglove sa brojem stranica $2^k \cdot n$ i $\frac{n}{2^k}$ (mnogougao sa dvostruko manjim brojem stranica možemo dobiti jedino ako je (n) paran broj)

Na primer od šestougla možemo dobiti trougao, dvanestougao, dvadeset četiriugao ... 3×2^n — tougao.

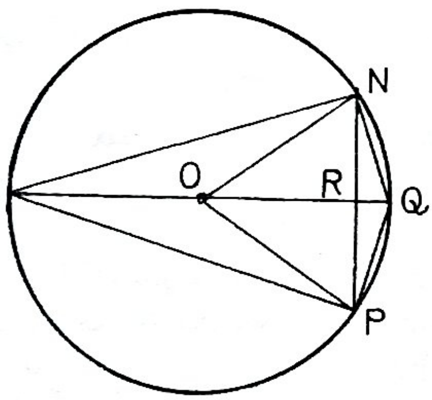


Spajanjem svakog drugog temena dobija se trougao



Konstruisanjem simetrala stranica dobija se 12-tougao

Dužinu stranice $2n$-tougla možemo dobiti algebarski iz stranice S_n n-tougla.



Neka je $PN = S_n$ i $NQ = S_{2n} = QP$
Površina trougla MQN može se izraziti na dva načina pa je:

$$\frac{1}{2} NQ \cdot NM = 1/2\, MQ \cdot RN$$

$$OM = R = 1$$

$$MN = \sqrt[2]{MQ^2 - NQ^2} = \sqrt[2]{4 - S_{2n}^2}$$

Sada je: $\sqrt[2]{4 - S_{2n}^2} \cdot S_{2n} = S_n$

Kvadriranjem dobijamo: $S_n^2 = (S_{2n})^2 \cdot (4 - S_{2n}^2)$

$$S_n^2 = 4 S_{2n}^2 - (S_{2n}^2)^2$$

Uvođenjem smene $S_{2n}^2 = p$, i rešavanjem kvadratne jednačine po (p) dobijamo:

$$p^2 - 4p + S_n^2 = 0$$

$$p_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4S_n^2}}{2}; \quad p_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4S_n^2}}{2}$$

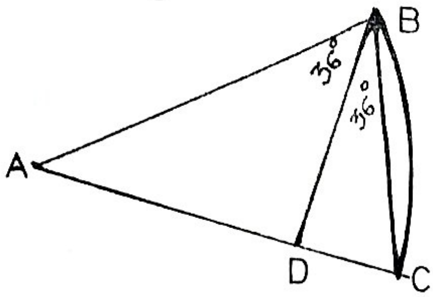
$$p_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - S_n^2},$$

(S_n) je stranica dva n-tougla upisanog u kružnicu poluprečnika

1 pa je $(S_{2n})^2 < 2$. Iz ovog sledi:

$$(S_{2n})^2 = 2-\sqrt{4-S_n^2}\ ; \quad S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}$$

Konstrukcija pravilnog petougla i desetougla je složenija:



Neka je desetougao upisan u kružnicu poluprečnika R.

$\measuredangle BAC = 360^\circ/10 = 36^\circ$

$\measuredangle ABC = 72^\circ$; i $\measuredangle BCA = 72^\circ$

Neka je BD simetrala $\measuredangle ABC$

$\measuredangle ABD = \measuredangle DBC = 36^\circ$;

$\measuredangle BDC = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$

$\triangle ABC \sim \triangle DBC$, iz sličnosti sledi:

$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DC}$, neka je $BC = BD = AD = X$: pošto je $AB = R$ i $DC = R - X$, iz ovoga sledi:

$$\frac{R}{X} = \frac{X}{R-X}, \text{ pa je } R^2 - RX = X^2$$

(X) nalazimo kao rešenje kvadratne jednačine

$$X^2 + RX - R^2 = 0$$

$$X_{1/2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2+4R^2}}{2}, \text{ (X) mora biti} > 0$$

kao merni broj duži pa je: $X = \frac{-R+R\sqrt{5}}{2} = \boxed{R \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Za $R=1$, $X = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

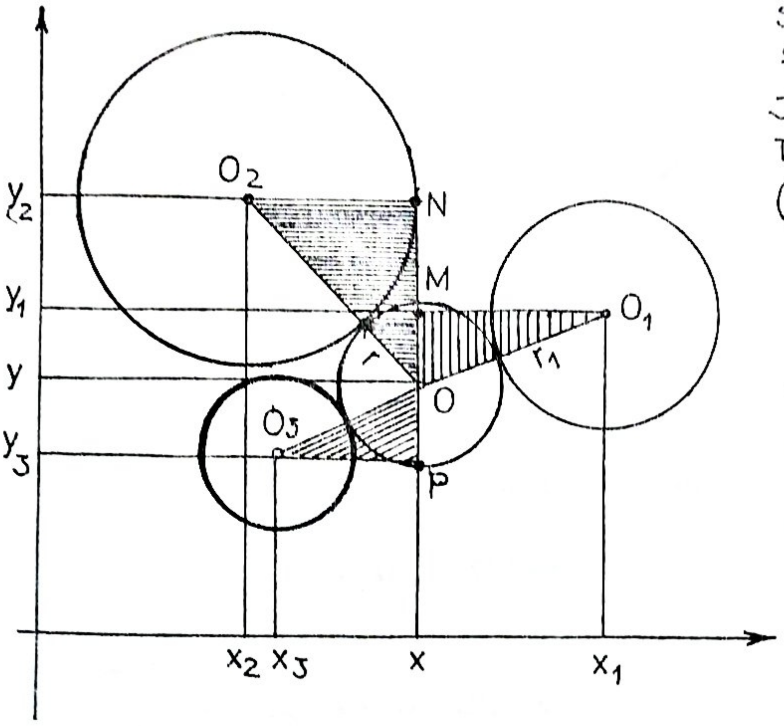
Pošto polazeći od poluprečnika kao zadate duži možemo racionalnim operacijama i korenovanjem doći do stranice desetougla, to znači da desetougao možemo konstruisati uz pomoć lenjira i šestara. Spajanjem svakog drugog temena desetougla dobija se petougao, a konstruisanjem simetrala stranica 10-tougla u preseku sa kružnicom, temena 20-tougla.
Ponavljanjem ovoga postupka, konstruisanjem simetrala stranica 20-tougla dobija se 40-tougao, i nakon (n) ponavljanja $5\cdot 2^n$-tougao.
Isto tako polazeći od četvorougla možemo dobiti svaki 2^n-tougao, i polazeći od trougla svaki $3\cdot 2^n$-tougao.

3. APOLONIJEV PROBLEM DODIRA

Apolonijev problem dodira, kod koga se traži kružnica koja dodiruje tri zadate kružnice, je jedan od najčuvenijih problema.

Specijalne probleme kod kojih su jedan ili više

KRUGOVA DEGENERISANI U TAČKU ILI PRAVU ($R=0$ I $R=\infty$) LAKO JE REŠITI, DOK JE OPŠTI PROBLEM SLOŽEN. REŠIVOST OVOG PROBLEMA ODREDJUJEMO ALGEBARSKI, I TO TAKO ŠTO SVE TRI ZADANE KRUŽNICE SMEŠTAMO U KOORDINATNI SISTEM (x, y), I ODREDJUJEMO KOORDINATE NJIHOVIH TEMENA I POLUPREČNIKE. $(x_1 ; y_1 ; r_1 ; x_2 ; \dots)$



SADA MOŽEMO ALGEBARSKI ODREDITI USLOV ZA DODIR; DA BI SE DVE KRUŽNICE DODIRIVALE, POTREBNO JE DA RASTOJANJE IZMEDJU NJIHOVIH CENTARA BUDE JEDNAKO ZBIRU ILI RAZLICI NJIHOVIH POLUPREČNIKA (POŠTO SE MOGU DODIRIVATI SPOLJA I IZNUTRA).

AKO POLUPREČNIK TRAŽENE KRUŽNICE OBELEŽIMO SA (r), A KOORDINATE SA $(x\ y)$ TADA DOBIJAMO 3 JEDNAČINE.

IZ TROUGLOVA MOO_1; NOO_2; I POO_3:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(r\pm r_1)^2=0 \qquad (1)$$
$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-(r\pm r_2)^2=0 \qquad (2)$$
$$(x-x_3)^2+(y-y_3)^2-(r\pm r_2)^2=0 \qquad (3)$$

(U ZAGRADAMA STOJI $\pm$ ZBOG TOGA ŠTO SE KRUŽNICE MOGU DODIRIVATI SPOLJA I IZNUTRA). UKOLIKO IZ OVE TRI JEDNAČINE RACIONALNIM OPERACIJAMA I KORENOVANJEM MOŽEMO ODREDITI $(r; x; y)$ TADA I LENJIROM I ŠESTAROM MOŽEMO KONSTRUISATI TRAŽENU KRUŽNICU. SADA KVADRIRAMO JEDNAČINE I UOČAVAMO DA SU ČLANOVI DRUGOG STEPENA NEPOZNATIH U SVIM JEDNAČINAMA ISTI.

$$x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2-r^2\mp 2rr_1-r_1^2=0 \qquad (1)'$$
$$x^2-2xx_2+x_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2-r^2\mp 2rr_2-r_2^2=0 \qquad (2)'$$
$$x^2-2xx_3+x_3^2+y^2-2yy_3+y_3^2-r^2\mp 2rr_3-r_3^2=0 \qquad (3)'$$

ODUZIMANJEM $(2)'$ OD $(1)'$ DOBIJAMO:

$$-2xx_1+2xx_2+x_1^2-x_2^2-2yy_1+2yy_2+y_1^2-y_2^2\mp 2rr_1$$
$$\pm 2rr_2-r_1^2+r_2^2=0$$

SREDJIVANJEM OVE JEDNAČINE DOBIJA SE:

$$\boxed{x(2x_2-2x_1)+y(2y_2-2y_1)\pm r(2r_2-2r_1)=y_2^2-y_1^2+x_2^2-x_1^2+r_1^2-r_2^2} \quad (4)$$

NA ISTI NAČIN ODUZIMANJEM (3)′ OD (1)′ DOBIJAMO:

$$x(2x_3-2x_1)+y(2y_3-2y_1)\pm r(2r_3-2r_1)=y_3^2-y_1^2+x_3^2-x_1^2+r_1^2-r_3^2 \quad (5)$$

AKO IZVRŠIMO ZAMENU:

$$2x_2-2x_1=a \quad i \quad 2x_3-2x_1=a'$$
$$2y_2-2y_1=b \quad i \quad 2y_3-2y_1=b'$$
$$2r_2-2r_1=c \quad i \quad 2r_3-2r_1=c'$$
$$y_2^2-y_1^2+x_2^2-x_1^2+r_1^2-r_2^2=d \quad i \quad y_3^2-y_1^2+x_3^2-x_1^2+r_1^2-r_3^2=d'$$

DOBIĆEMO DVE LINEARNE JEDNAČINE:

$$ax+by+cr=d$$
$$a'x+b'y+c'r=d'$$

REŠAVANJEM OVE DVE JEDNAČINE PO (x i y) DOBIJAMO:

$$ax=d-by-cr \qquad a'x=d'-b'y-c'r$$

$$\boxed{x=(d-by-cr)/a} \qquad \boxed{x=(d'-b'y-c'r)/a'}$$

$$da'-ba'y-ca'r=d'a-b'ay-c'ar$$
$$y(b'a-ba')=d'a-c'ar+ca'r-da'$$

$$\boxed{y=(d'a-c'ar+ca'r-da')/(b'a-ba')} \quad (6)$$

$$\boxed{x=\frac{d'}{a'}-\frac{b'}{a'}\cdot\frac{d'a-c'ar+ca'r-da'}{b'a-ba'}-\frac{c'r}{a'}} \quad (7)$$

REŠENJA (x) i (y) iz OVE DVE LINEARNE JEDNAČINE ZAMENJUJEMO U JEDNAČINI (1) i DOBIJAMO KVADRATNU JEDNAČINU U KOJOJ JE NEPOZNATO SAMO (r).

$$\left(\frac{d'}{a'}-\frac{b'(d'a-c'ar+ca'r-da)}{a'(b'a-ba')}-\frac{c'r}{a'}-x_1\right)^2+\left(\frac{d'a-c'ar+ca'r-da'}{b'a-ba'}-y_1\right)^2-(r\pm r_1)^2=0$$

U OVOJ JEDNAČINI NAJVEĆI STEPEN (r) JE (r^2), PA JE OVO KVADRATNA JEDNAČINA PO (r) KOJU MOŽEMO REŠITI RACIONALNIM OPERACIJAMA I KORENOVANJEM ŠTO ZNAČI DA POLUPREČNIK NEPOZNATE KRUŽNICE MOŽEMO KONSTRUISATI POMOĆU ŠESTARA I LENJIRA. U OBZIR DOLAZI SAMO POZITIVNO REŠENJE JEDNAČINE JER JE (r) MERNI BROJ DUŽI.

UVOĐENJEM VREDNOSTI (r) U IZRAZE (6) I (7) DOBIJAMO KOORDINATE centra tražene kružnice. Dakle Apolonijev problem dodira je rešiv.

Uzevši u obzir da u jednačinama (1), (2) i (3) imamo znakove ± i da u svakoj od njih imamo po dve mogućnosti (+ i −) to u opštem slučaju postoji $2^3 = 8$ rešenja.

U nekim slučajevima nemogu se dobiti realna rešenja na primer kada su zadate kružnice koncentrične. Degeneracijom zadatih kružnica (u tačku ili pravu) degeneriše se broj i oblik rešenja.

III. KONSTRUKTIBILNI BROJEVI I BROJNA POLJA

Svaka geometrijska konstrukcija koja se izvodi lenjirom i šestarom ima algebarsku podlogu u tome što lenjirom i šestarom možemo izvesti sve racionalne operacije i korenovanje. Postoje četiri osnovna načina upotrebe lenjira i šestara:

1.- Spajanje dve tačke pravom

2.- Nalaženje preseka dve prave

3.- Opisivanje kružnice datog poluprečnika iz date tačke

4.- Nalaženje preseka dve kružnice ili prave i kružnice.

Svaka konstrukcija se obično posmatra u koordinatnom sistemu (x, y) pri čemu je svaki element (tačka, prava) određen koordinatama. Problem se sastoji u iznalaženju nepoznatih duži iz poznatih.

Ako je zadata jedinična duž koordinatama $(0,0)$; $(1,0)$ tada lenjirom i šestarom možemo konstruisati sve one duži čije merne brojeve možemo dobiti iz broja (1) racionalnim operacijama. Sabiranjem i oduzimanjem možemo najpre dobiti sve cele brojeve, a zatim deljenjem, i sve racionalne brojeve jer se oni mogu prestaviti u obliku m/n.

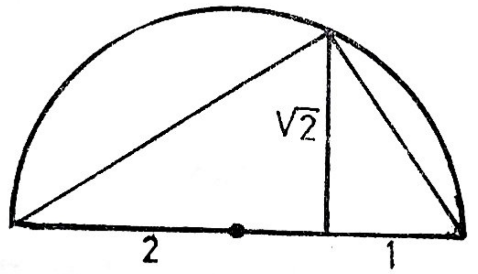
Skup racionalnih brojeva je zatvoren u odnosu na racionalne operacije. Na primer količnik dva racionalna broja je opet racionalan broj. Svaki skup brojeva zatvoren u odnosu na racionalne operacije naziva se brojno polje.

Dakle u koordinatnom sistemu (x, y) možemo konstruisati sve one tačke koje imaju racionalne koordinate. Skup ovih tačaka proširujemo korenovanjem koje takođe možemo izvesti pomoću lenjira i šestara. Na primer traženjem geometrijske sredine između brojeva (1) i (2) dobijamo broj $\sqrt{2}$. Koren iz (2) je iracionalan broj pa smo njime

PROŠIRILI BROJNO POLJE KONSTRUKTIBILNIH BROJEVA. SADA MOŽEMO KONSTRUISATI I SVE BROJEVE OBLIKA

$$a+b\sqrt{2} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

GDE (a) I (b) PRIPADAJU BROJNOM POLJU RACIONALNIH BROJEVA. BROJEVI OBLIKA (1) ČINE BROJNO POLJE JER JE NJIHOV SKUP ZATVOREN U ODNOSU NA RACIONALNE OPERACIJE.



$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}=(x+y\sqrt{2})$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd=$$
$$=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}=x+y\sqrt{2}$$

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}\times\frac{c-d\sqrt{2}}{c-d\sqrt{2}}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}=x+y\sqrt{2}$$

$(c^2-2d^2)\neq 0$ JER U PROTIVNOM $c^2=2d^2$; $\sqrt{2}=\frac{c}{d}$ ŠTO JE NEMOGUĆE JER $\sqrt{2}$ NIJE RACIONALAN.

OVO BROJNO POLJE JE VEĆE OD BROJNOG POLJA RACIONALNIH BROJEVA KOJI ČINE PODPOLJE BROJEVA OBLIKA $(a+b\sqrt{2})$, ALI JE MANJE OD POLJA SVIH REALNIH BROJEVA.

AKO POLJE RACIONALNIH BROJEVA OBELEŽIMO SA (F_0), A POLJE BROJEVA OBLIKA (1) SA (F_1) TADA SKUP KONSTRUKTIBILNIH BROJEVA MOŽEMO IZJEDNAČITI SA (F_1) JER $F_1\supset F_0$. OVAJ SKUP PROŠIRUJEMO BROJEM $\sqrt{K}$ TAKVIM DA $(K)\subset F_1$ I $\sqrt{K}$ NE PRIPADA F_1. SADA MOŽEMO KONSTRUISATI I SVE BROJEVE OBLIKA:

$$p+\sqrt{K}\cdot Q \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

GDE BROJEVI (p) I (Q) PRIPADAJU (F_1). BROJEVI OBLIKA (2) ČINE BROJNO POLJE JER JE NJIHOV SKUP ZATVOREN U ODNOSU NA ALGEBARSKE OPERACIJE:

NA PRIMER: $(\sqrt{K}\cdot\sqrt{2}+1/\sqrt{2}):(\sqrt{K^3}-3)=(\sqrt{K}\,\sqrt{2}+1/\sqrt{2}):(K\sqrt{K}-3)=$

$$=\frac{(\sqrt{K}\cdot\sqrt{2}+1/\sqrt{2})(K\sqrt{K}+3)}{(K\cdot\sqrt{K}-3)(K\sqrt{K}+3)}=\frac{(\sqrt{K}\sqrt{2}+1/\sqrt{2})(K\sqrt{K}+3)}{(K^3-9)}=$$

$$=\frac{K^2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{K}+K\sqrt{K}/\sqrt{2}+3/\sqrt{2}}{(K^3-9)}=\left(\frac{K^2\sqrt{2}+3/\sqrt{2}}{K^3-9}\right)+$$

$$\left(\frac{3\sqrt{2}+K/\sqrt{2}}{K^3-9}\right)\cdot\sqrt{K}=p+Q\sqrt{K}$$

POŠTO JE SKUP BROJEVA OBLIKA: $(p+Q\sqrt{K})$, $(p;Q;K) \subset F_1$ i $\sqrt{K} \not\subset F_1$); ZATVOREN U ODNOSU NA RACIONALNE OPERACIJE, TO OVI BROJEVI ČINE NOVO, PROŠIRENO BROJNO POLJE F_2. OVIM POLJEM PROŠIREN JE SKUP KONSTRUKTIBILNIH BROJEVA.

UKOLIKO JE OSIM JEDINIČNE DUŽI ZADATA I NEKA DUŽ α; TADA SU KONSTRUKTIBILNI I SVI BROJEVI α^n; GDE JE (n) PRIRODAN BROJ, PA SE MOGU KONSTRUISATI I BROJEVI OBLIKA:

$$\frac{a_m\alpha^m + a_{(m-1)}\alpha^{(m-1)} + \dots + a_1\alpha + a_0}{b_n\alpha^n + b_{(n-1)}\alpha^{(n-1)} + \dots + b_1\alpha + b_0}$$

GDE SU $(a_m; \dots a_0)$ i $(b_n \dots b_0)$ RACIONALNI KOEFICIJENTI, A (m) i (n) PRIRODNI BROJEVI.

UPOTREBA LENJIRA NAS NE MOŽE IZVESTI IZ NEKOG BROJNOG POLJA (F) KONSTRUKTIBILNIH BROJEVA. UZMIMO NA PRIMER POLJE RACIONALNIH BROJEVA F_0. AKO KROZ DVE TAČKE SA RACIONALNIM KOORDINATAMA $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ POVUČEMO PRAVU, JEDNAČINA TE PRAVE BIĆE:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot(x - x_1); \quad y(x_2 - x_1) + x(y_1 - y_2) = y_1x_2 - y_2x_1$$

KOEFICIJENTI OVE JEDNAČINE PRIPADAJU (F_0), JER SE SASTOJE IZ RACIONALNIH BROJEVA POVEZANIH RACIONALNIM OPERACIJAMA. NI KOORDINATE PRESEKA DVE PRAVE NE PROŠIRUJU F_0, NA PRIMER, NEKA SE SEKU DVE PRAVE:

$$(1)\ ax + by = c \quad i \quad (2)\ a'x + b'y = c'$$

KOORDINATE PRESEKA SU:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}; \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

(x) i (y) TAKOĐE PRIPADAJU F_0 JER JE SVAKO BROJNO POLJE ZATVORENO U ODNOSU NA RACIONALNE OPERACIJE.

IZ NEKOG POLJA (F) MOŽEMO IZAĆI JEDINO UPOTREBOM ŠESTARA, JER JEDINO UZ POMOĆ ŠESTARA MOŽEMO KONSTRUISATI KVADRATNI KOREN NEKOG BROJA. POLJE (F) NIJE ZATVORENO U ODNOSU NA KORENOVANJE, PA BROJ $\sqrt{K}$, GDE (K) PRIPADA (F), NEĆE U OPŠTEM SLUČAJU PRIPADATI POLJU (F). AKO ODABEREMO TAKAV BROJ (K) DA $\sqrt{K}$ NE PRIPADA (F), TADA DOBIJAMO NOVO PROŠIRENO POLJE (F') KOJE SADRŽI BROJEVE OBLIKA $(a+\sqrt{K})$, GDE (a) i (b) i (K) PRIPADAJU (F). POŠTO U OVOM IZRAZU (b) MOŽE BITI i (0), TO JE POLJE (F) PODPOLJE BROJNOG POLJA (F'). NOVO POLJE (F') JE ZATVORENO U ODNOSU NA RACIONALNE OPERACIJE, NA PRIMER BROJ:

$$\frac{a+b\sqrt{K}}{c+d\sqrt{K}}\cdot(c-d\sqrt{K})=\left(\frac{ac-Kbd}{c^2-Kd^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2-Kd^2}\right)\cdot\sqrt{K}$$

PRI ČEMU $c^2-Kd^2\neq 0$, JER U PROTIVNOM $c^2=Kd^2$, I $\sqrt{K}=c/d$ ŠTO JE SUPROTNO PRETPOSTAVCI DA $\sqrt{K}$ NE PRIPADA (F).

PRETPOSTAVIMO SADA DA SE POLJE (F) SASTOJI IZ BROJEVA $(a+b\sqrt{2})$ GDE SU (a) I (b) RACIONALNI BROJEVI I DA POLJE (F′) DOBIJAMO NALAŽENJEM KVADRATNOG KORENA BROJA $\sqrt{2}$ $(\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2})$. DOKAŽIMO SADA DA SE SVAKI BROJ PROŠIRENOG POLJA (F′) MOŽE NAPISATI U OBLIKU $(p+q\sqrt[4]{2})$ GDE (p) I (q) PRIPADAJU (F).

UZMIMO NA PRIMER SLEDEĆI BROJ:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt[4]{2}+2-\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}}=$$

$$\left(\frac{2\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\sqrt[4]{2}=\left(\frac{2\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}\right)-\sqrt[4]{2}$$

DAKLE, I OVAJ BROJ SE MOŽE NAPISATI KAO $(p+q\sqrt[4]{2})$

POLAZEĆI OD BROJEVA BROJNOG POLJA (F), JEDNOM PRIMENOM ŠESTARA I KONSTRUKCIJOM $\sqrt{K}$, DOBIJAMO PROŠIRENO POLJE (F′) KOJE JE ODREĐENO BROJEVIMA $(a+b\sqrt{K})$; (a; b; K) PRIPADA (F) I $\sqrt{K}$ NE PRIPADA (F).

SADA TREBA DOKAZATI DA SE JEDNOM UPOTREBOM ŠESTARA DOBIJAJU SAMO OVI BROJEVI.

DOVOLJNO JE DOKAZATI DA SU KOORDINATE PRESEKA DVE KRUŽNICE, ILI PRAVE I KRUŽNICE, UNUTAR PROŠIRENOG POLJA (F′).

NEKA SE KRUŽNICA:

$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, SEČE SA PRAVOM

$ax+by+c=0$

SREĐIVANJEM: $x^2-2xp+p^2+y^2-2yq+q^2-r^2=0$

ŠTO SE MOŽE NAPISATI: $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$

SADA IZ LINEARNE JEDNAČINE PRAVE NALAZIMO (y) I ZAMENJUJEMO U KVADRATNOJ JEDNAČINI.

$$y=-(ax+c)/b$$

$$x^2+[-(ax+c)/b]^2+2Ax+2B[-(ax+c)/b]+C=0$$

$$x^2+a^2x^2/b^2)+x(2ac/b+2A-2Ba/b)+(C-2Bc/b+c^2/b^2)=0$$

SADA VRŠIMO ZAMENU:

$$1+a^2/b^2=X$$
$$2ac/b+2A-2Ba/b=Y$$
$$C-2Bc/b+c^2/b^2=Z$$

(x) JE SADA REŠENJE KVADRATNE JEDNAČINE

$$Xx^2+Yx+Z=0$$

$x_{1/2}=\dfrac{-Y\pm\sqrt{Y^2-4XZ}}{2X}$, ŠTO ZNAČI DA JE I (x) OBLIKA

$(a+b\sqrt{K})$, pa pripada polju (F'). (y) takođe pripada (F') jer se dobija iz (x) racionalnim operacijama.

Posmatrajmo sada koordinate preseka dve kružnice

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0 \qquad (1)$$
$$x^2+y^2+2A'x+2B'y+C=0 \qquad (2)$$

Oduzimanjem ove dve jednačine:

$$2(A-A')x+2(B-B')y+(C-C')=0 \quad ;$$
$$y=-\frac{2(A-A')x+(C-C')}{2(B-B')} \qquad (3)$$

Zamenimo (y) bilo u (1) ili (2), dobijamo kvadratnu jednačinu po (x) čiji koeficijenti pripadaju (F), kao i u prethodnom slučaju.

$$Mx^2+Nx+Q=0 \; ; \; x_{1/2}=(-N\pm\sqrt{N^2-4MQ})/2M$$

(x) je, dakle oblika $(a+b\sqrt{K})$ pa pripada (F'), kao i (y) koje dobijamo racionalnim operacijama, zamenom izračunate vrednosti (x) u (3).

Ovim je dokazano tvrđenje da jednom upotrebom šestara dobijamo isključivo brojeve $(a+b\sqrt{K})$.

Dakle, polazeći od jedinične duži, uz pomoć lenjira mogu se konstruisati sve duži čiji su merni brojevi racionalni. Ovi brojevi pripadaju polaznom polju (F_0). Upotrebom šestara proširujemo ovo polje konstruišući duž $(\sqrt{K_0})$ gde (K_0) zadovoljava uslove:

$$K_0 \in F_0 \quad , \; i \; \sqrt{K_0} \notin F_0$$

(u protivnom bi bilo (F_0) identično sa proširenim poljem).

Prošireno polje (F_1) definisano je brojevima $(a_0+b_0\sqrt{K_0})$ gde (a_0) i $b_0 \in F_0$.

Polje (F_2), proširenje brojnog polja (F_1), dobija se korenovanjem nekog broja iz (F_1) i definisano je brojevima $(a_1+b_1\sqrt{K_1})$, gde su (a_1) i (b_1) proizvoljni brojevi (F_1), a (K_1) je broj iz (F_1) čiji koren ne pripada (F_1).

Ponavljajući (n) puta ovo proširivanje skupa konstruktibilnih brojeva dobićemo neko brojno polje (F_n).

Dakle, konstruktibilni su samo oni brojevi do kojih možemo doći uzastopnim proširivanjem brojnih polja. Na primer broj:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5}$$

je konstruktibilan jer do njega možemo doći nizom proširenih brojnih polja: Neka je (F_0) polje racionalnih brojeva koje proširujemo brojem $\sqrt{K_0}=\sqrt{2}$. Prošireno polje (F_1) sadrži brojeve oblika $a_0+b_0\sqrt{2}$ pa sadrži i broj $1+\sqrt{2}$ koji je dakle konstruktibilan.

Proširimo sada polje (F_1) do polja (F_2) – brojem $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Prošireno polje (F_2) obuhvata dakle i sam broj $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ koji je konstruktibilan.

Ako polje (F_2) proširimo brojem $\sqrt{3}$, sledeće prošireno polje (F_3) obuhvatiće i broj $\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$ koji je takodje konstruktibilan.

Proširivanjem polja (F_3) brojem $\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}$ dobićemo polje (F_4) kome će pripadati i broj: $\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5$. Ako sada korenom ovog broja proširimo (F_4), proširenom brojnom polju (F_5) pripadaće i broj:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5},$$ pa je, dakle, konstruktibilan.

U koliko je polazno polje (F_0) generisano jediničnom duži sve konstruktibilne brojeve možemo prestaviti kao rešenja algebarskih jednačina pa su oni algebarski brojevi. Znamo da jednim korenovanjem proširujemo (F_0) i dobijamo (F_1), drugim korenovanjem dobijamo (F_2) i td. Iz ovog sledi da su brojevi iz (F_1) rešenja kvadratne jednačine, brojevi (F_2) rešenja jednačine četvrtog stepena, i u opštem slučaju brojevi polja (F_n) rešenja jednačine 2^n-tog stepena. Uzmimo na primer jedan broj iz (F_2):

$$X=\sqrt{5+\sqrt{7}}-\sqrt{7}$$

$$X+\sqrt{7}=\sqrt{5+\sqrt{7}}$$

$$X^2+7-2\sqrt{7}X=5+\sqrt{7}$$

$$X^2+2=\sqrt{7}(1+2X)$$

$$X^4+4X^2+4=7+28X+28X^2$$

$$X^4-24X^2-28X-3=0$$

Ovo je jednačina četvrtog stepena po (X) što dokazuje tvrdjenje da su brojevi polja (F_N) rešenja algebarske jednačine 2^n-tog stepena.

Pošto su brojevi polja (F_K) rešenje jednačine 2^K-tog stepena to možemo zaključiti da nisu konstruktibilni oni brojevi koji se ne mogu svesti na racionalne izraze u kojima figurišu samo koreni sa izložiocima 2^p – gde je (p) prirodan broj.

Takvi su brojevi:

$$\sqrt[3]{3}\ ;\quad \sqrt[7]{2}\ ;\quad \text{itd.}$$

IV. NEREŠIVOST TRI GRČKA PROBLEMA

1. UDVAJANJE KOCKE

PROBLEM UDVAJANJA KOCKE SASTOJI SE U KONSTRUKCIJI IVICE KOCKE ČIJA ĆE ZAPREMINA BITI 2 PUTA VEĆA OD ZAPREMINE ZADATE KOCKE. AKO ZA STRANICU ZADATE KOCKE UZMEMO JEDINIČNU DUŽ, TADA ĆE STRANICA TRAŽENE KOCKE MORATI DA ZADOVOLJAVA JEDNAČINU:

$$X^3 = 2, \text{ i } X = \sqrt[3]{2}.$$

($\sqrt[3]{2}$) NIJE RACIONALNI BROJ, JER U KOLIKO JE RACIONALAN TADA SE MOŽE NAPISATI KAO KOLIČNIK DVA UZAJAMNO PROSTA CELA BROJA, A TADA JE:

$$\sqrt[3]{2} = a/b \;;\quad 2 = a^3/b^3 \text{ i } 2b^3 = a^3$$

IZ OVOGA SLEDI DA JE (a) PARAN BROJ, PA MOŽEMO NAPISATI:

$$a^3 = 8a_1^3 \;;\quad 2b^3 = 8a_1^3 \;;\quad b^3 = 4a_1^3$$

IZ OVOGA SE MOŽE ZAKLJUČITI DA I (b) MORA BITI PARAN BROJ ŠTO JE U KONTRADIKCIJI SA PRETPOSTAVKOM DA SU (a) I (b) UZAJAMNO PROSTI PA $\sqrt[3]{2}$ NE MOŽE BITI RACIONALAN BROJ.

POŠTO (X) NIJE ELEMENAT (F_0), BROJNOG POLJA RACIONALNIH BROJEVA, PRETPOSTAVIMO DA JE ELEMENT NEKOG PROŠIRENOG POLJA (F_K), I TO TAKVOG DA JE (K) NAJMANJI PRIRODAN BROJ TAKAV DA (X) $\in$ (F_K).

IZ OVE PRETPOSTAVKE SLEDI DA (X) MOŽEMO NAPISATI KAO $X = p + Q\sqrt{r}$; GDE (p, Q I r) PRIPADAJU (F_{K-1}) I $\sqrt{r} \notin (F_{K-1})$ POŠTO (X) PRIPADA (F_K) OVOM POLJU ĆE PRIPADATI I BROJ X^3-2, PA MOŽEMO NAPISATI:

$$X^3 - 2 = a + b\sqrt{r}$$
$$(p+Q\sqrt{r})^3 - 2 = a + b\sqrt{r}$$
$$p^3 + 3p^2Q\sqrt{r} + 3pQ^2r + Q^3r\sqrt{r} = a + b\sqrt{r}$$
$$(p^3 + 3pQ^2r - 2) + (3p^2Q + Q^3r)\cdot\sqrt{r} = a + b\sqrt{r}$$
$$a = p^3 + 3pQ^2r - 2$$
$$b = 3p^2Q + Q^3r$$

DAKLE $X^3 - 2 = a + b\sqrt{r}$;

POSMATRAJMO SADA BROJ $y = p - Q\sqrt{r}$, ON TAKOĐE PRIPADA POLJU (F_K), PA I BROJ y^3-2 PRIPADA (F_K).

$$y^3 - 2 = p^3 - 3p^2Q\sqrt{r} + 3pQ^2r - Q^3r\sqrt{r} - 2$$
$$y^3 - 2 = (p^3 + 3pQ^2r - 2) - (3p^2Q + Q^3r)\sqrt{r}$$
$$y^3 - 2 = a - b\sqrt{r}, \quad \text{DAKLE:}$$

$X^3 - 2 = a + b\sqrt{r}$ i $y^3 - 2 = a - b\sqrt{r}$.

(X) JE REŠENJE JEDNAČINE $X^3-2=0$, PA MORA BITI:

$$a + b\sqrt{r} = 0$$

IZ OVOGA SLEDI: $a = b = 0$, JER U PROTIVNOM $b\sqrt{r} = -a$, I $\sqrt{r} = -a/b$ ŠTO SE PROTIVI PRETPOSTAVCI $\sqrt{r} \notin F_{K-1}$

Kako je $a=b=0$, tada je i $a-b\sqrt{r}=0$, pa iz toga sledi:
$x^3-2=0$ i $y^3-2=0$, pri čemu x; y pripada (F_k).
$x \neq y$, jer u protivnom $p+q\sqrt{r}-p+q\sqrt{r}=0$; i $2q\sqrt{r}=0$, što je nemoguće, jer bi tada bilo $q=0$ i (x) i (y) bi pripadalo polju (F_{k-1}), što se protivi pretpostavci.
($\sqrt{r} \neq 0$, jer u protivnom $F_{k-1} \equiv$ sa F_k, pa nebi bilo proširenja)

Iz ovoga sledi da jednačina $x^3-2=0$, ima dva različita realna rešenja:

(x) i (y) su dva različita realna rešenja:
$x^3-2=0$
$y^3-2=0$ $x \neq y$, što je nemoguće, jer postoji samo jedan broj - realan - $\sqrt[3]{2}$.

Broj (x) dakle ne može pripadati polju (F_k) što znači da nije konstruktibilan. Udvajanje kocke lenjirom i šestarom je dakle ne izvodljivo.

2. Trisekcija ugla

Problem trisekcije ugla se sastoji u konstruisanju jedne trećine zadatog ugla pomoću lenjira i šestara. Postoje uglovi čiju je trećinu lako konstruisati (180°, 90°) ali u opštem slučaju problem je nerešiv.

Izražen algebarski, problem se sastoji u iznalaženju duži:

$x=\cos\alpha/3$, ako je zadato: $k=\cos\alpha$

Treba dokazati da broj (x) nije konstruktibilan.

$$\cos\alpha=\cos\left(3\cdot\frac{\alpha}{3}\right)=\cos(2\alpha/3+\alpha/3)=$$
$$\cos\alpha/3\cdot\cos 2\alpha/3-\sin\alpha/3\cdot\sin 2\alpha/3=$$
$$\cos\alpha/3(\cos^2\alpha/3-\sin^2\alpha/3)-2\sin^2\alpha/3\cos\alpha/3=$$
$$\cos^3\alpha/3-3\sin^2\alpha/3\cos\alpha/3=\cos\alpha/3(\cos^2\alpha/3-3\sin^2\alpha/3)=$$
$$\cos\alpha/3(4\cos^2\alpha/3-3)\ \cdots\ (\text{jer } \sin^2\alpha/3+\cos^2\alpha/3=1$$
$$\underline{\cos\alpha=4\cos^3\alpha/3-3\cos\alpha/3}$$

Sada imamo kubnu jednačinu po (x):

$$k=4x^3-3x$$

$$4x^3-3x-k=0$$

Problem trisekcije ugla sada se svodi na konstrukciju bar jednog rešenja ove kubne jednačine. Dovoljno je pokazati da ova jednačina nema racionalnih rešenja, jer ako kubna jednačina sa racionalnim koeficijentima nema racionalnih korena, tada ni jedan od njenih korena nije konstruktibilan polazeći od polja (F_0).

Ovo tvrđenje se može i dokazati:
Neka kubna jednačina: $x^3+ax^2+bx+c=0$, nema racionalnih rešenja.

Pretpostavimo da je jedan koren ove jednačine konstruktibilan. Tada on pripada nekom proširenom polju (F_k), gde je (k) najmanji prirodan broj takav da rešenje ove kubne jednačine pripada polju (F_k).
Sada se može napisati:

$x_1 = p + q\sqrt{r}$, pri čemu (p, q) i $r \in (F_{k-1})$ i $\sqrt{r} \notin (F_{k-1})$.

(F_k) je polje zatvoreno u odnosu na racionalne operacije pa se može napisati:

$$x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = m + n\sqrt{r} \in F_k$$

Ako u ovom polinomu zamenimo x_1 sa $p+q\sqrt{r}$, dobijamo;

$$x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = (p^3 + 3pq^2r + ap^2 + aq^2r + bp + c) + (3p^2q + q^3r + 2apq + bq)\sqrt{r} = m + n\sqrt{r}$$

$$m = p^3 + 3pq^2r + ap^2 + aq^2r + bp + c$$

$$n = 3p^2q + q^3r + 2apq + bq$$

Pokažimo sada da je broj $x_2 = p - q\sqrt{r}$ drugo rešenje ove jednačine:

$$x_2^3 + a_2^2 + bx_2 + c = (p - q\sqrt{r})^3 + a(p - q\sqrt{r}) + b(p - q\sqrt{r}) + c = (p^3 + 3pq^2r + ap^2 + aq^2r + bp + c) - (3p^2q + q^3r + 2apq + bq)\sqrt{r} = m - n\sqrt{r} \ldots$$

Pošto je (x_1) rešenje jednačine to sledi:

$x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ i $m + n\sqrt{r} = 0$, iz ovoga sledi da je $m = n = 0$ jer u protivnom $m = -n\sqrt{r}$ i $\sqrt{r} = -m/n$ što se protivi sa pretpostavkom da $\sqrt{r}$ ne pripada polju (F_{k-1}).

Pošto je $m = n = 0$, tada važi i: $m - n\sqrt{r} = 0$, pa kako je

$x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = m - n\sqrt{r}$, to je i $x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0$,

Dakle: $x_2 = p - q\sqrt{r}$ je drugo rešenje kubne jednačine.
Sada još treba naći treće rešenje.

Jednačinu možemo faktorizovati:

$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, množenjem dobijamo:

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$$

Dakle:

$-a = x_1 + x_2 + x_3$ (a je koeficijent kvadratnog člana polazne jednačine)

$$x_3 = -a - x_1 - x_2$$

$$x_3 = -a - p - q\sqrt{r} - p + q\sqrt{r} = a - 2p$$

Pošto je (a) racionalan broj, i (p) pripada polju (F_{k-1}), to će i broj $x_3 = -a - 2p$, pripadati polju (F_{k-1}) što se protivi sa polaznom pretpostavkom da je (k) najmanji prirodan broj takav da rešenje kubne jednačine pripada polju (F_k). $(k-1) < k$.

Dakle u koliko kubna jednačina sa racionalnim koeficijentima nema racionalnih rešenja, tada njena rešenja nisu konstruktibilni brojevi. Za dokazivanje nemogućnosti trisekcije ugla, dakle, dovoljno je dokazati da jednačina

$4x^3-3x-k=0$, nema racionalnih rešenja.

Uzmimo da je $\alpha=60°$ i $\cos\alpha=1/2$, sada imamo:

$$4x^3-3x=1/2$$
$$8x^3-6x=1, \quad \text{zamenimo } 2x=x_1$$
$$x_1^3-3x_1=1$$

U koliko ova jednačina ima racionalnih rešenja, tada se ona mogu predstaviti u obliku a/b; gde su (a) i (b) uzajamno prosti celi brojevi.

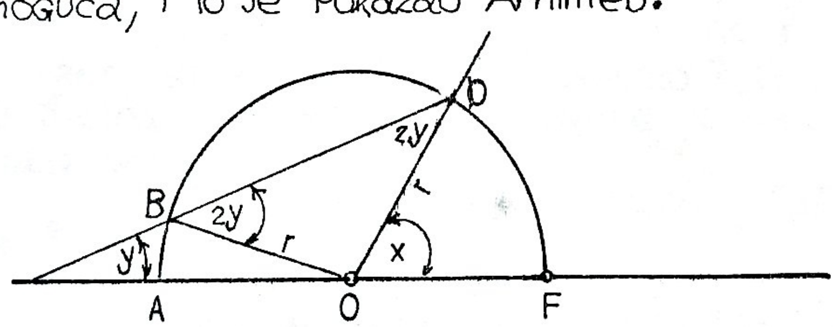
$$(a/b)^3-3(a/b)=1$$
$$(a^3/b^3-3a/b=1$$
$$a^3-3ab^2=b^3$$

$b^3=a(a^2-3b^2)$, iz ovog sledi da je (b) deljivo sa (a), a pošto su ovi brojevi uzajamno prosti mora biti: $a=\pm1$.

$a^3=b(b^2-3ab)$, (a) je deljivo sa (b) pa mora biti $b=\pm1$, pošto su (a) i (b) uzajamno prosti.

Pošto je $x_1=a/b$, i $a;b=\pm1$, to je moguće samo: $x_1=\pm1$.

Ovi brojevi ne zadovoljavaju jednačinu: $x^3-3x=1$, što znači da ova jednačina nema racionalnih, pa ni konstruktibilnih rešenja. Dakle, uz pomoć šestara i lenjira ne možemo naći trećinu zadatog ugla. U koliko lenjir ne koristimo samo za povlačenje pravih linija, trisekcija je moguća, i to je pokazao Arhimed:



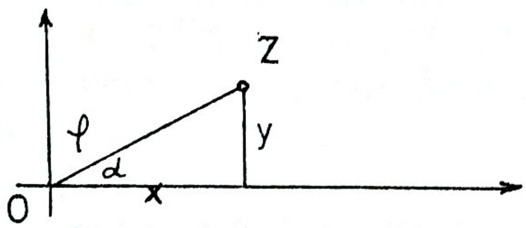
Neka je (x) zadati ugao i (r) neki proizvoljni poluprečnik. Na lenjiru označimo dve tačke na rastojanju (r), i uz pomoć takog lenjira konstruišemo pravu koja prolazi kroz tačku (D) tako da je odsečak (AB), odsečak između presečnih tačaka prave sa kružnicom i produženim krakom ugla; jednak (r).

$$AB=BO=r; \quad \sphericalangle BAO=\sphericalangle BOA=y$$
$$\sphericalangle DBO=\sphericalangle BDO=2y; \quad x=\sphericalangle DOF=\sphericalangle BDO+\sphericalangle BAO=2y+y=3y$$
$$x=3y; \quad y=x/3$$

3. PRAVILNI SEDMOUGAO

Nemogućnost konstrukcije pravilnog sedmougla uz pomoć lenjira i šestara najlakše je dokazati uz pomoć kompleksnih brojeva. U računi kompleksnih brojeva temena pravilnog sedmougla data su jednačinom $z^7=1$; pri čemu je (z) kompleksni broj $(x+yi)$ čiji su realni (x) i kompleksni deo (y) koordinate temena upisanog sedmougla u jediničnu kružnicu s centrom u koordinatnom početku.

Da bi se ovo dokazalo, treba najpre dokazati da u polju kompleksnih brojeva postoji (n) n-tih korena broja 1. Svaki kompleksni broj ima svoju trigonometrisku interpretaciju:



$$z = x + yi$$
$$x = \rho\cos\alpha \; ; \; y = \rho\sin\alpha$$
$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

Sada je lakše množiti, deliti, stepenovati i korenovati kompleksne brojeve.

$$zz' = \rho\rho'(\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha'))$$
$$z^2 = \rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$$
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\,(\cos\alpha/n + i\sin\alpha/n)$$

Pošto broj (1) možemo napisati kao $(1+0i)$ to je $|1|=1$ modul svih korena broja (1) biće takođe 1, pa će se tačke, koje odgovaraju ovim brojevima nalaziti na kružnici poluprečnika 1 s centrom u koordinatnom početku.

Prva vrednost za $(\sqrt[n]{1})$ je (1), i ukoliko je (n) neparan broj, to je jedina realna vrednost, dakle $x_0=1$.

Sledeća vrednost je:

$$x_1 = \cos 360°/n + i\sin 360°/n,$$ jer x_1 zadovoljava jednakost:

$$x_1^n = 1 \quad \text{jer je:}$$
$$x_1^n = \cos 360° + i\sin 360° = 1 + 0i = 1$$

isto tako: $x_2 = \cos 2\cdot 360°/n + i\sin 2\cdot 360°/n$

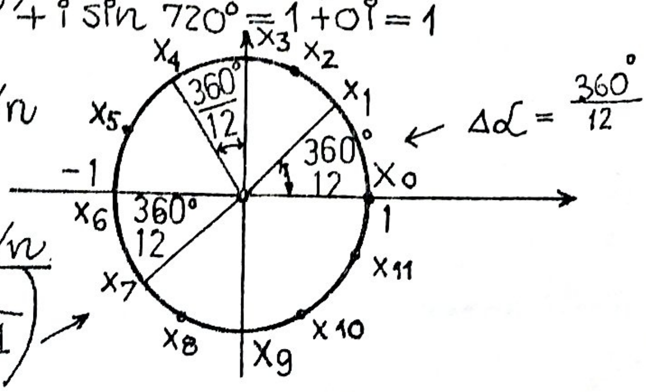
jer $x_2^n = \cos 720° + i\sin 720° = 1 + 0i = 1$

$$x_3 = \cos 3\cdot 360°/n + i\sin 3\cdot 360°/n$$

. . . .

$$x_k = \cos k\cdot 360°/n + i\sin k\cdot 360°/n$$

(postoji 12 različitih vrednosti za $\sqrt[12]{1}$)



X_n se podudara sa X_0 jer je: $X_n = \cos n\cdot 360°/n + i\sin n\cdot 360°/n = 1$ pa postoji ukupno (n) vrednosti za $\sqrt[n]{1}$ (od X_0 do X_{n-1}).
Ovih (n) n-tih korena broja 1 raspoređeno je na jediničnoj kružnici, jer je modul svakog korena jednak 1.
Uglovno rastojanje dva susedna korena je $\Delta\alpha = 360°/n$; što odgovara centralnom uglu pravilnog n-tougla, pa ovih (n) korena broja 1 obrazuje pravilni n-tougao upisan u kružnicu poluprečnika 1.
Kada je (n) paran broj, postoje dve vrednosti korena na (X) osi i to su dva realna korena: +1 i −1; a kada je (n) neparno, postoji samo jedan realan koren: 1.
Dakle, temena sedmougla su određena jednačinom: $z^7 = 1$
Jednačina se može srediti:

$$z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

Jedan koren jednačine je realan, z=1, a ostali su rešenja nove jednačine:

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

Jednačinu možemo pomnožiti sa $1/z^3$, jer je $z \neq 0$.

$$z^3 + z^2 + z + 1 + 1/z^2 + 1/z^3 = 0$$
$$(z^3 + 1/z^3) + (z^2 + 1/z^2) + (z + 1/z) + 1 = 0$$
$$z^3 + 3z - 3z + 3/z - 3/z + 1/z^3 + z^2 + 2 - 2 + 1/z^2 + z + 1/z + 1 = 0$$
$$z^3 + 3z + 3/z + 1/z^3 - 3z - 3/z + z^2 + 2 + 1/z^2 + z + 1/z - 1 = 0$$
$$(z^3 + 3z^2\cdot 1/z + 3z\cdot 1/z^2 + 1/z^3) - (3z + 3/z) + (z^2 + 2z\cdot 1/z + 1/z^2) + (z + 1/z) - 1 = 0$$
$$(z+1/z)^3 - 3(z+1/z) + (z+1/z)^2 + (z+1/z) - 1 = 0$$
$$(z+1/z)^3 + (z+1/z)^2 - 2(z+1/z) - 1 = 0$$

Sada uvodimo smenu: $(z+1/z) = t$ i dobijamo kubnu jednačinu po (t): $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$
(z) možemo predstaviti i u trigonometrijskom obliku:

$$z = \cos\alpha + i\sin\alpha, \text{ tada je:}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} \times \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

$$z + 1/z = \cos\alpha + i\sin\alpha + \cos\alpha - i\sin\alpha = 2\cos\alpha;$$

dakle, $t = 2\cos\alpha$

Sada je dovoljno dokazati da rešenja jednačine

$$(t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0)$$

nisu konstruktibilni brojevi; jer ako (t) nije konstruktibilno, tada se ne može konstruisati ni $\cos\alpha = t/2$, pa ni $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ neće biti konstruktibilan broj.
Rešenja kubne jednačine sa racionalnim koeficijentima nisu konstruktibilna ukoliko jednačina

nema racionalnih rešenja (ovo je dokazano u odeljku o trisekciji ugla).

Podjimo od pretpostavke da jednačina:

$t^3+t^2-2t-1=0$ ima racionalna rešenja.

Svaki racionalan broj se može napisati kao količnik dva cela uzajamno prosta broja pa sledi:

$$(k/p)^3+(k/p)^2-(k/p)\cdot 2-1=0 \qquad p\neq 0$$

$$k^3/p+k^2/p^2-2k/p-1=0;\quad k^3+k^2p-2kp^2-p^3=0$$

$$p^3=k(k^2+kp-2p^2);\qquad k^3=p(p^2+2kp-k^2).$$

Očito je da (p) mora biti deljivo s (k), i pošto su (p) i (k) uzajamno prosti, ostaje samo mogućnost: $k=\pm1$

(p) deli (k), a pošto uzajamno prosti brojevi mogu imati za zajednički činilac samo jedinicu, to je $p=\pm1$

Iz ovog sledi da je $k/p=\pm1$

Ni (+1) ni (−1) nisu rešenja jednačine $t^3+t^2-2t-1=0$, pa ova jednačina nema racionalnih, pa ni konstruktibilnih rešenja. Broj (t) dakle, nije konstruktibilan, pa to nije ni broj $\cos\alpha=t/2$. Kako je $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ ni (z) nije konstruktibilan broj, a kako su koordinate temena traženog sedmougla date jednačinom $z^7-1=0$, ni one nisu konstruktibilne, pa je dakle, lenjirom i šestarom nemoguće konstruisati pravilni sedmougao.

TEZE:

UVOD, DOKAZI NEMOGUĆIH KONSTRUKCIJA I ALGEBRA, KONSTRUKTIBILNI BROJEVI I BROJNA POLJA, NEREŠIVOST TRI GRČKA PROBLEMA

Rad ukazuje na mogućnost primene algebre pri rešavanju geometrijskih konstruktivnih problema. Teorija brojnih polja i analogija izmedju algebarskih operacija i upotrebe lenjira i šestara omogućuju odredjivanje rešivosti problema.

Rad sam pisao u konsultaciji s profesorkom Sofijom Mišković.

Literatura: – (Richard Courant/Herbert Robbins) „Šta je matematika"
– Matematički listovi

MAJ 1980 KANDIDAT

VRNJAČKA BANJA